Teoria Post Einstein (On perturbative constraints for vacuum $f(R)$ gravity)

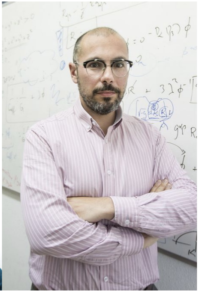
Daniel Molano, Fabian Villalba, Leonardo Castañeda, Pedro Bargueño

2 de marzo de 2021

Contenido

1. Autores
2. Introducción
    - Motivación y Ecuaciones de campo
3. Ecuaciones en el vacío y Teoría Post Einstein
    - Escalar de Ricci Constante
    - Simetría Esférica
4. Teoría de perturbaciones
    - Definición y series de Taylor
5. Conclusiones

Autores



Siguiente

1 Autores

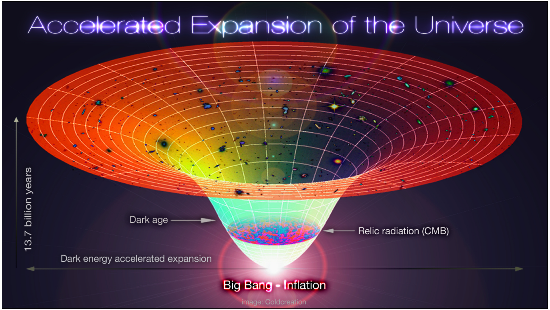
2 Introducción
   Motivación y Ecuaciones de campo

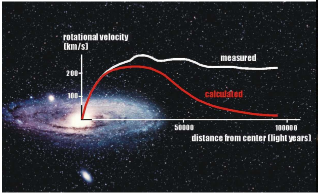
3 Ecuaciones en el vacío y Teoría Post Einstein
   Escalar de Ricci Constante
   Simetría Esférica

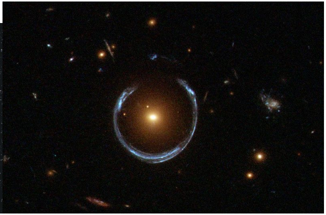
4 Teoría de perturbaciones
   Definición y series de Taylor

5 Conclusiones

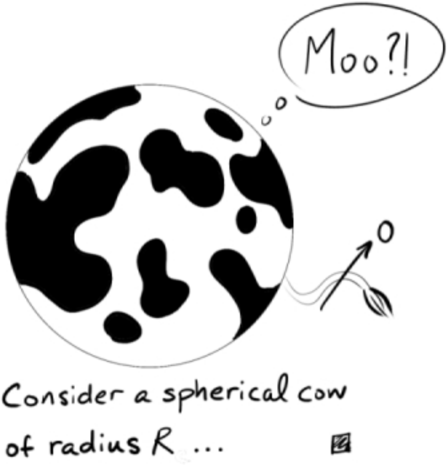
Motivación


Accelerated Expansion of the Universe
13.7 billion years
Dark age
Relic radiation (CMB)
Dark energy accelerated expansion
Big Bang - Inflation
image: Coldcreation


rotational velocity
(km/s)
200
100
measured
calculated
50000
100000
distance from center (light years)



Motivación



Ecuaciones de campo de Einstein

La acción de Einstein-Hilbert es:

$$S = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M). \tag{1}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}.$$

La acción en el formalismo métrico para teorías de gravedad modificada $f(R)$ es:

$$S = \frac{1}{2k^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + \int d^4x\mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M). \qquad (2)$$

Las ecuaciones de campo en teorías de gravedad modificada $f(R)$

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\Box f'(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu}.$$

La gravedad de Einstein corresponde a $f(R) = R$[1]

[1] **Guarnizo, Castaneda, Tejeiro (2010)**.

Siguiente

1. Autores
2. Introducción
   - Motivación y Ecuaciones de campo
3. Ecuaciones en el vacío y Teoría Post Einstein
   - Escalar de Ricci Constante
   - Simetría Esférica
4. Teoría de perturbaciones
   - Definición y series de Taylor
5. Conclusiones

Escalar de Ricci Constante

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. *Supongamos también que el escalar de Ricci* $R = R_0$ *es una constante y* $f'(R) \neq 0$. *Entonces las ecuaciones de campo para las teorías de gravedad modificada* $f(R)$ *en el vacío se reducen a:*

1. *Relatividad general sin constante cosmológica, si* $R_0 = 0$.
2. *Relatividad general con constante cosmológica, si* $R_0 \neq 0$.

Demostración: Dado que R_0 es constante $f(R_0)$ y $f'(R_0)$ también lo son, por lo tanto $\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R_0) = 0$, $\Box f'(R_0) = 0$. Así las ecuaciones de campo y la traza en el vacío quedan respectivamente como:

$$f'(R_0)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R_0)g_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

$$f'(R_0)R_0 - 2f(R_0) = 0. \tag{4}$$

1. Si $R_0 = 0$ entonces de (4), $f(R_0) = 0$, y por (3) $R_{\mu\nu} = 0$, lo que se reduce a GR sin constante cosmológica.
2. Si $R_0 \neq 0$ entonces de (4) $f(R_0) = f'(R_0)R_0/2$ por lo tanto (3) queda como

$$f'(R_0)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{f'(R_0)R_0}{2}\right)g_{\mu\nu} = 0$$

$$f'(R_0)\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R_0 g_{\mu\nu}\right) = 0$$

es decir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R_0 g_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

que equivale a GR con constante cosmológica $\Lambda = \frac{1}{4} R_0$. ■

Siguiente

1. Autores
2. Introducción
   - Motivación y Ecuaciones de campo
3. Ecuaciones en el vacío y Teoría Post Einstein
   - Escalar de Ricci Constante
   - Simetría Esférica
4. Teoría de perturbaciones
   - Definición y series de Taylor
5. Conclusiones

La métrica mas general estática, esfericamente simétrica en una variedad pseudo-Riemanniana puede ser escrita de la forma

$$ds^2 = -e^{\eta(r)}dt^2 + e^{\alpha(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \qquad (6)$$

$$0 = \Sigma_{00} = e^{\eta}\left\{\left[\frac{e^{-\alpha}}{4}(2\ddot{\eta} + \dot{\eta}^2 - \dot{\eta}\dot{\alpha}) + \frac{e^{-\alpha}\dot{\eta}}{r}\right]f' - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}f - f'R\right) + \frac{1}{2}\dot{\eta}e^{-\alpha}\dot{R}f''\right\}$$

$$0 = \Sigma_{11} = \left[-\frac{1}{4}(2\ddot{\eta} + \dot{\eta}^2 - \dot{\eta}\dot{\alpha}) + \frac{\dot{\alpha}}{r}\right]f' - \frac{e^{\alpha}}{3}\left(\frac{1}{2}f - f'R\right) - f'''\dot{R}^2 - f''\ddot{R} + \frac{1}{2}\dot{\alpha}e^{-\alpha}\dot{R}f''$$

$$0 = \Sigma_{22} = \left(1 + \frac{-\dot{\eta}r + \dot{\alpha}r - 2}{2}e^{-\alpha}\right)f' + \frac{r^2}{3}\left(\frac{1}{2}f - f'R\right) - r\dot{R}f''e^{-\alpha}$$

$$\dot{\eta}+\dot{\alpha}=\frac{f'''\dot{R}^2+f''\ddot{R}}{\frac{f'}{r}+\frac{f''\dot{R}}{2}}=\frac{2r\partial_r^2 f'}{2f'+r\partial_r f'}. \tag{7}$$

Consideremos ahora el modelo $f(R)=R+\lambda R^2$, entonces

$$-R''+\frac{1}{2}(\eta'+\alpha')R'-\frac{R}{r}(\eta'+\alpha')=\frac{(\eta'+\alpha')}{2\lambda r}, \tag{8}$$

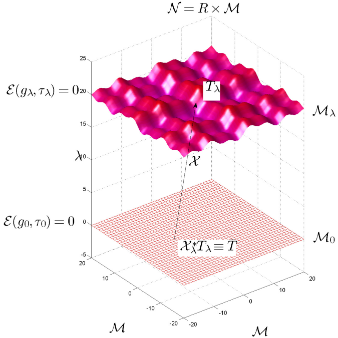
$$R''+R'\left[\frac{1}{2}(\eta'-\alpha')+\frac{2}{r}\right]-\frac{Re^{\alpha}}{6\lambda}=0, \tag{9}$$

$$R=\frac{1}{2}\frac{2r^2\eta''+r^2\eta'^2-r^2\eta'\alpha'+4\eta' r-4\alpha' r-4e^{\alpha}+4}{r^2e^{\alpha}}, \tag{10}$$

Siguiente

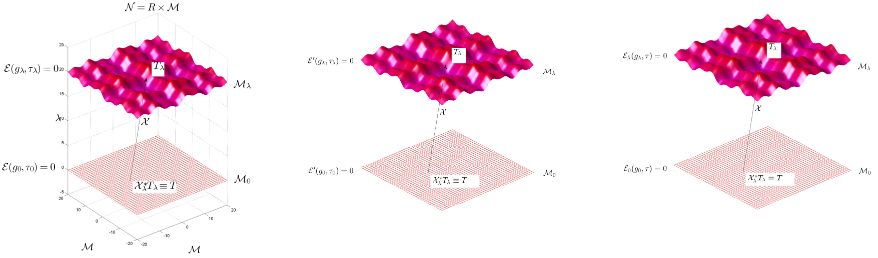
1. Autores
2. Introducción
   - Motivación y Ecuaciones de campo
3. Ecuaciones en el vacío y Teoría Post Einstein
   - Escalar de Ricci Constante
   - Simetría Esférica
4. Teoría de perturbaciones
   - Definición y series de Taylor
5. Conclusiones

Definición y series de Taylor



$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}^*_\lambda T_\lambda &= T_0 + \lambda \mathcal{L}_X T + \frac{\lambda^2}{2!}\mathcal{L}^2_X T + \cdots \\
&= \overset{(0)}{T} + \lambda \overset{(1)}{T} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{T} + \cdots = T_0 + {}^{\mathcal{X}}\Delta T_\lambda
\end{aligned} \tag{11}
$$

Ecuaciones en el vacío y Teoría post-Einstein



$$\Sigma_{ab} = 0 \longrightarrow G_{ab} = T^{(D)}_{ab} \tag{12}$$

2

[2] **Geroch (1969)**.

Sean $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ dos tensores

$$\bar{P} = \overset{(0)}{P} + \lambda \overset{(1)}{P} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{P} + \cdots \tag{13}$$

$$\bar{Q} = \overset{(0)}{Q} + \lambda \overset{(1)}{Q} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{Q} + \cdots \tag{14}$$

de aquí se puede ver que

$$\bar{P}\bar{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overset{(i)}{P} \overset{(n-i)}{Q} \tag{15}$$

Por lo tanto el n-esimo orden de la multiplicación de $\bar{P}$ y $\bar{Q}$ es

$$\overset{(n)}{PQ} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overset{(i)}{P} \overset{(n-i)}{Q} . \tag{16}$$

$$\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \bar{f}'\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{f}\bar{g}_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\bar{f}' + \bar{g}_{\mu\nu}\bar{\Box}\bar{f}' \tag{17}$$

Donde

$$\bar{f} = \overset{(0)}{f} + \lambda \overset{(1)}{f} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{f} + \cdots \tag{18}$$

$$\bar{f}' = \overset{(0)}{f'} + \lambda \overset{(1)}{f'} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{f'} + \cdots \tag{19}$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{g}_{\mu\nu} + \cdots \tag{20}$$

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{R}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} + \cdots \tag{21}$$

Ecuaciones de Campo a orden n

$$
\begin{aligned}
\overset{(n)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{n} \Bigg[\binom{n}{i} \overset{(i)}{f'} \overset{(n-i)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\binom{n}{i} \overset{(i)}{f} \overset{(n-i)}{g}_{\mu\nu} \Bigg] \\
- \nabla_\mu \nabla_\nu \overset{(n)}{f'} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \overset{(n-i)}{C}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha} \nabla_\alpha \overset{(i)}{f'} \\
+ \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{k} \overset{(n-i)}{g}_{\mu\nu} \overset{(i-k)}{g}{}^{\alpha\beta} \\
\cdot \Bigg[\nabla_\alpha \nabla_\beta \overset{(k)}{f'} - \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \overset{(k-l)}{C}{}_{\alpha\beta}{}^{\delta} \nabla_\delta \overset{(l)}{f'} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{22}
$$

3

[3] **Nakamura (2014)**.

Theorem

Sea $\bar{\Sigma}_{ab} = 0$ *las ecuaciones de campo en TGM* $f(R)$ *en el vacío para el modelo* $f(\bar{R}) = \bar{R} + \lambda \bar{R}^2$, *entonces* $\bar{\Sigma}_{ab} = \bar{G}_{ab}$ *en el vacío.*

Demostraremos primero que $\overset{(n)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n)}{G}_{\mu\nu}$. Por inducción tenemos que Caso n=0,

$$\overset{(0)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{f'}\,\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\overset{(0)}{f}\,\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\,\overset{(0)}{f'} + g_{\mu\nu}\Box\,\overset{(0)}{f'} \tag{23}$$

reemplazando

$$\overset{(0)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\overset{(0)}{R}\,\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu 1 + g_{\mu\nu}\Box 1 = \overset{(0)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\overset{(0)}{R}\,\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} \tag{24}$$

Tomando la traza y bajo la suposición que es en el vacío tenemos que $\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(0)}{R} = 0$.

Caso n=1

$$\overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{f'}\,\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} + \overset{(0)}{f'}\,\overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\overset{(1)}{f}\,\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} + \overset{(0)}{f}\,\overset{(1)}{g}_{\mu\nu})$$

$$- \nabla_\mu \nabla_\nu \overset{(1)}{f'} + \overset{(1)}{C}_{\mu\nu}{}^{\alpha}\,\nabla_\alpha \overset{(0)}{f'}$$

$$+ \overset{(1)}{g}_{\mu\nu}\,\Box\,\overset{(0)}{f'} + \overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha \nabla_\beta \overset{(0)}{f'}$$

$$+ \overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\,\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta}[\nabla_\alpha \nabla_\beta \overset{(1)}{f'} + \overset{(1)}{C}_{\alpha\beta}{}^{\delta}\,\nabla_\delta \overset{(0)}{f'}]$$

Dado que $\overset{(0)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(0)}{R} = 0$ entonces

$$\overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{R}\,\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} \tag{25}$$

tomando la traza tenemos que $\overset{(1)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(1)}{R} = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Supongamos que $\overset{(i)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(i)}{G}_{\mu\nu}$ y para todo $i = 0, \ldots, n$ y veamos que $\overset{(n+1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n+1)}{G}_{\mu\nu}$. Tomando la traza en las ecuaciones $\overset{(i)}{G}_{\mu\nu} = 0$ tenemos que $\overset{(i)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(i)}{R} = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Reescribiremos (22) sacando los términos que contienen $\overset{(0)}{f}$ y $\overset{(0)}{f'}$

$$
\begin{aligned}
\overset{(n+1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n+1} \Bigg[& \binom{n+1}{i} 2i \overset{(i-1)}{R}_{\mu\nu} \overset{(n-i-1)}{R}_{\mu\nu} \\
& - \frac{1}{2} \binom{n+1}{i} \left(\overset{(i)}{R} + i \sum_{m=0}^{i} \binom{i-1}{m} \overset{(m)}{R} \overset{(i-m-1)}{R} \right) \overset{(n-i+1)}{g}_{\mu\nu} \Bigg] \\
& - 2(n+1) \nabla_\mu \nabla_\nu \overset{(n)}{R} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \overset{(n-i+1)}{C}_{\mu\nu}{}^{\alpha} \nabla_\alpha 2i \overset{(i-1)}{R} \\
& + \sum_{i=1+1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \binom{n+1}{i} \binom{i}{k} \overset{(n-i+1)}{g}_{\mu\nu} \overset{(i-k)}{g}{}^{\alpha\beta} \\
& \cdot \left[\nabla_\alpha \nabla_\beta 2k \overset{(k-1)}{R} - \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \overset{(k-l)}{C}_{\alpha\beta}{}^{\delta} \nabla_\delta 2l \overset{(l-1)}{R} \right] \\
& + \overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{(n)}{g}_{\mu\nu} \overset{(0)}{R}
\end{aligned}
$$

Aplicando la hipótesis de inducción, es decir usando el hecho que $\overset{(i)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(i)}{R} = 0$ para todo $i = 0, \dots, n$, entonces tenemos

$$\overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(n+1)}{R} = \overset{(n+1)}{G}_{\mu\nu} \tag{26}$$

y por lo tanto aplicando la traza, $\overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(n+1)}{R} = 0$. Hemos demostrado que $\overset{(n)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n)}{G}_{\mu\nu}$, por lo tanto

$$\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \lambda\overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \cdots = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \lambda\overset{(1)}{G}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{(2)}{G}_{\mu\nu} + \cdots = \bar{G}_{\mu\nu} \tag{27}$$

Teorema

Sea $\bar{\Sigma}_{ab} = 0$ *las ecuaciones de campo en TGM* $f(R)$ *en el vacío para el modelo* $f(\bar{R}) = \bar{R} + \lambda\Psi(\bar{R})$ *donde* $\Psi(0) = 0$, *entonces* $\bar{\Sigma}_{ab} = \bar{G}_{ab}$ *en el vacío.*

Podemos entonces expandir $\bar{\Psi} = \overset{(0)}{\Psi} + \lambda \overset{(1)}{\Psi} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{\Psi} + \cdots$, así

$$\overset{(0)}{f} = \overset{(0)}{R} \ \text{para} \ n = 0 \tag{28}$$

$$\overset{(n)}{f} = \overset{(n)}{R} + n \overset{(n-1)}{\Psi} \ \text{para} \ n \geq 1 \tag{29}$$

también

$$\overset{(0)}{f'} = 1 \ \text{para} \ n = 0 \tag{30}$$

$$\overset{(n)}{f'} = n \overset{(n-1)}{\Psi'} \ \text{para} \ n \geq 1 \tag{31}$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\Psi(\bar{R}) =& \Psi(\overset{(0)}{R} + \lambda \overset{(1)}{R} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{R} + \cdots) \\
=& \Psi(\overset{(0)}{R}) + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{R}} \overset{(1)}{R} + \frac{\lambda^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{R}^2} \overset{(1)}{R^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{R}} \overset{(2)}{R} \right] \\
& + \frac{\lambda^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \bar{R}^3} \overset{(1)}{R^3} + 3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{R}^2} \overset{(2)}{R} \overset{(1)}{R} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{R}} \overset{(3)}{R} \right] + \cdots
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Entonces

$$
\begin{aligned}
\overset{(0)}{f} &= \overset{(0)}{R} & \overset{(0)}{f'} &= 1,\\
\overset{(1)}{f} &= \overset{(1)}{R} + \Psi(\overset{(0)}{R}) & \overset{(1)}{f'} &= \Psi'(\overset{(0)}{R}),\\
\overset{(2)}{f} &= \overset{(2)}{R} + \Psi'(\overset{(0)}{R})\,\overset{(1)}{R} & \overset{(2)}{f'} &= 2\Psi''(\overset{(0)}{R})\,\overset{(1)}{R}\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
\tag{32}
$$

El termino n esimo de $\overset{(n)}{f}$ sera $\overset{(n)}{R}$ mas una combinación sumas de productos de derivadas de Ψ con respecto R y diferentes ordenes del escalar de curvatura $\overset{(i)}{R}$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Así mismo el termino n-esimo de $\overset{(n)}{f'}$ sera combinaciones de sumas de productos de diferentes ordenes del escalar de curvatura $\overset{(i)}{R}$ para $i = 0, \ldots, n-1$.

veamos por inducción que $\overset{(n)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n)}{G}_{\mu\nu}$. Así a orden cero en $\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$ tenemos

$$\overset{(0)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(0)}{R} = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} \tag{33}$$

A primer orden

$$\overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}(\overset{(1)}{R} + \overset{(0)}{\Psi}) - \nabla_\mu\nabla_\nu\overset{(0)}{\Psi'} + \overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\Box\overset{(0)}{\Psi'} \tag{34}$$

Si $\Psi(0) = 0$ entonces

$$\overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}\overset{(1)}{R} = \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} \tag{35}$$

Ahora supongamos que se cumple para n y veamos que se cumple para $n+1$, esto es, asumamos que $\overset{(i)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(i)}{G}_{\mu\nu}$ y para todo $i = 0, \ldots, n$ y veamos que $\overset{(n+1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n+1)}{G}_{\mu\nu}$. Tomando la traza en las ecuaciones $\overset{(i)}{G}_{\mu\nu} = 0$ tenemos que $\overset{(i)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(i)}{R} = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Así por las propiedades (32) tenemos,

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{f} &= 0 & \overset{(0)}{f'} &= 1, \\ \overset{(i)}{f} &= \overset{(i)}{R} & \overset{(i)}{f'} &= 0, \end{aligned} \tag{36}$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Para $n+1$ de la formula (22) se tiene

$$\overset{(n+1)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \left[\binom{n+1}{0} \overset{(0)}{f'} \overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \binom{n+1}{n+1} \overset{(n+1)}{f} \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} \right]$$
$$= \overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overset{(n+1)}{R} \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \overset{(n+1)}{G}_{\mu\nu} .$$

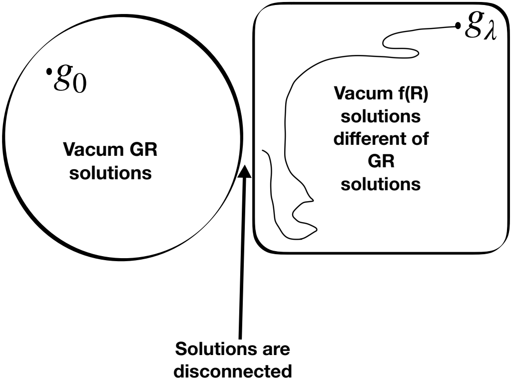
Así $\overset{(n)}{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(n)}{G}_{\mu\nu}$ y también $\overset{(n+1)}{R}_{\mu\nu} = 0$ y $\overset{(n+1)}{\Sigma} = 0$. Finalmente

$$\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \overset{(0)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(1)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{\Sigma}_{\mu\nu} + \cdots = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(1)}{G}_{\mu\nu} + \frac{\lambda^2}{2!} \overset{(2)}{G}_{\mu\nu} + \cdots = \bar{G}_{\mu\nu} \tag{37}$$

■

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Discusión



g_0
Vacum GR solutions
g_λ
Vacum f(R) solutions different of GR solutions
Solutions are disconnected

Conclusiones

- Los campos tensoriales en la variedad $\mathcal{N}$ usualmente están restringidos por las ecuaciones de campo de Einstein. En nuestro caso ampliamos las posibilidades y restringimos los campos tensoriales a TGM $f(R)$.

Conclusiones

- Los campos tensoriales en la variedad $\mathcal{N}$ usualmente están restringidos por las ecuaciones de campo de Einstein. En nuestro caso ampliamos las posibilidades y restringimos los campos tensoriales a TGM $f(R)$.
- Se estudian las ecuaciones en el vacío y se obtienen características generales de las soluciones y se abre la posibilidad de aplicar la teoría de perturbaciones para comparar soluciones en TGM con RG.

Bibliografía

- A. Guarnizo, L. Castañeda and J. M. Tejeiro. *"Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism"* Gen. Rel. Grav. 42 (2010):2713-2728.

Bibliografía

- A. Guarnizo, L. Castañeda and J. M. Tejeiro. *"Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism"* Gen. Rel. Grav. 42 (2010):2713-2728.
- J. Hortua, Leonardo Castañeda, Juan M. Tejeiro *"Evolution of magnetic fields through cosmological perturbation theory"* Phys. Rev. D 87, 103531 (2013)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Bibliografía

- A. Guarnizo, L. Castañeda and J. M. Tejeiro. *"Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism"* Gen. Rel. Grav. 42 (2010):2713-2728.
- J. Hortua, Leonardo Castañeda, Juan M. Tejeiro *"Evolution of magnetic fields through cosmological perturbation theory"* Phys. Rev. D 87, 103531 (2013)
- J. Hortua, Leonardo Castañeda *Contrasting cosmological perturbation theory* Class. Quantum Grav. (2015)

Bibliografía

- A. Guarnizo, L. Castañeda and J. M. Tejeiro. *"Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism"* Gen. Rel. Grav. 42 (2010):2713-2728.
- J. Hortua, Leonardo Castañeda, Juan M. Tejeiro *"Evolution of magnetic fields through cosmological perturbation theory"* Phys. Rev. D 87, 103531 (2013)
- J. Hortua, Leonardo Castañeda *Contrasting cosmological perturbation theory* Class. Quantum Grav. (2015)
- K. Nakamura. *"Second-Order Gauge-Invariant Cosmological Perturbation Theory: Current Status"*, Advances in Astronomy. Vol. 2010, ID 576273, 2010.

Bibliografía

- A. Guarnizo, L. Castañeda and J. M. Tejeiro. *"Boundary term in metric $f(R)$ gravity: field equations in the metric formalism"* Gen. Rel. Grav. 42 (2010):2713-2728.
- J. Hortua, Leonardo Castañeda, Juan M. Tejeiro *"Evolution of magnetic fields through cosmological perturbation theory"* Phys. Rev. D 87, 103531 (2013)
- J. Hortua, Leonardo Castañeda *Contrasting cosmological perturbation theory* Class. Quantum Grav. (2015)
- K. Nakamura. *"Second-Order Gauge-Invariant Cosmological Perturbation Theory: Current Status"*, Advances in Astronomy. Vol. 2010, ID 576273, 2010.
- Bruni, M., Materrese, S., Mollerach, S., Sonego, S. *"Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond"* Class. Quantum Grav. 14 (1997) 2585-2606.

Resumen

Resumen

Muchas gracias